МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
уравнений в частных производных
и теории вероятностей

А.В. Глушко
25.05.2023

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

ФТД.02 Дополнительные главы уравнений в частных производных

1. Код и наименование направления подготовки: 01.03.04 Прикладная математика

2. Профиль подготовки: Применение математических методов к решению инженерных и экономических задач

3. Квалификация выпускника: Бакалавр

4. Форма обучения: Очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета

6. Составители программы: Рябенко Александр Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент

7. Рекомендована: Научно-методическим советом математического факультета Протокол №0500-06 от 25.05.23

8. Учебный год: 2025/ 2026 Семестр(ы): 5, 6

9. Цели и задачи учебной дисциплины

Цели изучения дисциплины:

- является изучение разделов функционального анализа, ориентированных на изучение начальных и начально-краевых задач для уравнений с частными производными;
- выработка навыков оперирования с элементами пространств основных функций;
- выработка навыков оперирования с элементами пространств обобщенных функций;
- дать качественные математические и естественнонаучные знания, востребованные обществом;
- дать современные теоретические знания в области уравнений математической физики и практические навыки в решении и исследовании основных типов дифференциальных уравнений с частными производными;
- сформировать социально-личностные качества выпускников: целеустремленность, организованность, трудолюбие, коммуникабельность, умение работать в коллективе, ответственность за конечный результат своей профессиональной деятельности, способности самостоятельно приобретать и применять новые знания и умения.

Задачи учебной дисциплины:

- умение проверять принадлежность к пространству основных функций, находить пределы в этих пространствах, проводить действия над элементами этих пространств;
- умение проверять принадлежность к пространству обобщенных функций, находить пределы в этом пространстве, проводить действия над элементами этих пространствах;
- способность применения обобщенных функций при изучении реальных процессов и объектов с целью нахождения эффективных решений общенаучных и прикладных задач широкого профиля.

10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП: факультативы..

Для его успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения по предшествующим дисциплинам: математический анализ, комплексный анализ, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, теоретическая механика.

Студент должен свободно владеть математическим анализом, теорией рядов, теорией функций комплексной переменной, элементами линейной алгебры, обладать полными знаниями курса обыкновенных дифференциальных уравнений, знаниями теории интегралов Лебега, теории банаховых и гильбертовых пространств.

Знание методов изучения решений начальных и начально-краевых задач для уравнений с частными производными является базовым при изучении математических моделей различных физических, химических, биологических, социальных процессов. Кроме того, уравнения с частными производными и задачи для них являются отдельным современным динамически развивающимся разделом математической науки.
Дисциплина является предшествующей для курсов методов вычислений, механики сплошной среды, математического моделирования, концепций современного естествознания, всех специальных курсов, изучающих задачи математической физики.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять знание фундаментальной математики и	ОПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области	Знать: основные положения теории уравнений в частных производных и уравнений математической физики. Уметь: формулировать постановки основных

	естественно-научных дисциплин при решении задач в области естественных наук и инженерной практике		математических и (или) естественных наук	задач математической физики, знать основные методы построения обобщенных функций; формулировать и доказывать теоремы существования, единственности, корректной постановки задач для уравнений с частными производными Владеть: теоретическими подходами к созданию математических моделей в области уравнений с частными производными; навыками работы в современных информационных системах.
		ОПК-1.2	Умеет использовать базовые знания в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности.	Знать: общие формы закономерности теории уравнений с частными производными и сферы их применения. Уметь: решать начально-краевые задачи для уравнений математической физики, грамотно и правильно представлять свои результаты. Владеть: источниками информации, навыками работы с литературой, информационными системами, навыками моделирования практических задач дифференциальными уравнениями.
		ОПК-1.3	Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	Знать: методы решения задач в области уравнений с частными производными и особенности их применения. Уметь: работать с различными источниками научной информации, определять оптимальный метод решения задачи для уравнения математической физики. Владеть: методами самостоятельного обучения новым знаниям и способами их применения в области уравнений с частными производными, основными методами научного исследования.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.— 1 /36.

Форма промежуточной аттестации: **зачет – 6 семестр**

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость		
		Всего	По семестрам	
			5 семестр	6 семестр
Контактная работа		32	16	16
в том числе:	лекции	32	16	16
	практические			
	лабораторные			
	курсовая работа			
	контрольные работы			
Самостоятельная работа		4	2	2
Промежуточная аттестация		зачет		зачет

Итого:	36	18	18

13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
1.1	Пространство основных функций D. Пространство обобщенных функций D'. Непрерывные операции в D и D'	Пространство основных функций D. Непрерывность операции в D.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11055-
		Пространство обобщенных функций D'. Пример функционала из D'.	-
		Лемма о диагональной последовательности и теорема о полноте пространства D'.	-
		Носитель и нулевое множество обобщенной функции. Дельта-функция Дирака. Дельта-функция Дирака как предел последовательности основных функций.	-
		Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Лемма дю-Буа-Реймонда. Доказательство сингулярности дельта-функции Дирака.	-
		Формулы Сохоцкого.	-
		Непрерывные операции в D'. Операция дифференцирования. Линейная замена переменной. Умножение на бесконечно дифференцируемую функцию.	-
		Обобщенные производные по Соболеву. Пример на вычисление обобщенной производной кусочно-дифференцируемой функции.	-
		Свойства обобщенных производных: линейность, непрерывность, бесконечная дифференцируемость, независимость от порядка дифференцирования, формула Лейбница дифференцирования произведения, нерастекание носителя при обобщенном дифференцировании.	-
1.2	Пространство основных функций S. Пространство обобщенных функций медленного роста S'	Пространство основных функций S. Сходимость в S. Вложение D в S.	-
		Непрерывность операции в S.	-
		Пространство обобщенных функций медленного роста в S'. Сходимость в S'. Вложение S' в D'.	-
		Непрерывные операции в S'.	-
		Теорема Л.Шварца. Пример обобщенной функции медленного роста.	-

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Пространство основных функций D. Пространство обобщенных функций D'. Непрерывные	16			2	18

	операции в D и D'					
2	Пространство основных функций S. Пространство обобщенных функций медленного роста S'	16			2	18
	Итого:	32			4	36

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины:

Преподавание дисциплины заключается в чтении лекций и проведении практических занятий. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Дополнительные главы уравнений в частных производных» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения обучающимся рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.
2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникают вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутствующий час преподавателю.
3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.
4. Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке.

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

Кроме обычного курса в системе «Электронный университет», все необходимые для усвоения курса материалы размещены на кафедральном сайте http//:www.kuchp.ru

Методические указания для обучающихся при самостоятельной работе.

Самостоятельная работа обучающихся направлена на самостоятельное освоение всех тем и вопросов учебной дисциплины, предусмотренных программой. Самостоятельная работа является обязательным видом деятельности для каждого обучающегося, ее объем по учебному курсу определяется учебным планом и составляет 4 часа. При самостоятельной работе обучающийся взаимодействует с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя.

Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и ресурсами сети Internet, статистическими данными является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся заинтересованное отношение к конкретной проблеме.

Вопросы, которые вызывают у обучающихся затруднения при подготовке, должны быть заранее сформулированы и озвучены во время занятий в аудитории для дополнительного разъяснения преподавателем.

Виды самостоятельной работы: конспектирование учебной и научной литературы; проработка учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе); работа в электронной библиотечной системе; работа с информационными справочными системами, выполнение домашних заданий (практических и теоретических); выполнение контрольных работ; подготовка к практическим занятиям; работа с вопросами для самопроверки.

Все задания, выполняемые студентами самостоятельно, подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Сабитов К.Б. Уравнения математической физики / К.Б. Сабитов. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с. // «Университетская библиотека online»: электронно-библиотечная система.. – URL: http://biblioclub.ru

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с. – *URL*:http://www.kuchp.ru
2	Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С. Владимиров, В.П. Михайлов, Михайлова Т.В., Шабунин М.И. – М: Физматлит, 2016. – 512 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/
3	Карчевский М.М. Лекции по уравнениям математической физики / М.М. Карчевский. – СПб: Издательство «Лань», 2016. – 164 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/
4	Карчевский М.М. Уравнения математической физики. Дополнительные главы: Учебное пособие / М.М. Карчевский, Павлова М. Ф. – СПб: Издательство «Лань», 2021. – 276 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)**:**

№ п/п	Ресурс
1	http://eqworld.ipmnet.ru – интернет-портал, посвященный уравнениям и методам их решений
2	http://www.lib.vsu.ru - электронный каталог ЗНБ ВГУ
3	http://www.kuchp.ru – электронный сайт кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, на котором размещены методические издания
4	ЭБС «Университетская библиотека онлайн»
5	ЭБС «Лань»
6	Электронный курс https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11055

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы:

№ п/п	Источник
1	Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С. Владимиров, В.П. Михайлов, Михайлова Т.В., Шабунин М.И. – М: Физматлит, 2016. – 512 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/
2	Деревич И.В. Практикум по уравнениям математической физики / И. В. Деревич. – СПб: Издательство «Лань», 2017. – 428 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/
3	Глушко А.В. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными. Постановка основных задач математической физики / А.В. Глушко, А.С. Рябенко. – Воронеж: ИД ВГУ, 2018. – 33 с. – URL: http://www.kuchp.ru
4	Глушко А.В. Практические занятия по классификации дифференциальных уравнений с частными производными / А.В. Глушко, А.С. Рябенко. – Воронеж: ИД ВГУ, 2018. – 38 с. – URL: http://www.kuchp.ru
5	Рябенко А.С. Методы построения решений краевых задач для эллиптических уравнений / А.С. Рябенко. – Воронеж: ВГПУ, 2015. – 45 с. – URL: http://www.kuchp.ru
6	Глушко А.В. Дифференциальные уравнения с частными производными гиперболического и параболического типов / А.В. Глушко, Е.А. Логинова, С.А. Ткачева. – Воронеж: ИД ВГУ, 2019. – 80 с. – URL: http://www.kuchp.ru
7	Глушко А.В. Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка эллиптического типа / А.В. Глушко, Е.А. Логинова, Л.В. Безручкина. – Воронеж: ИД ВГУ, 2019. – 92 с. – URL: http://www.kuchp.ru

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11055-).

Перечень необходимого программного обеспечения: Microsoft Windows Server 2008, Microsoft Windows 10 Enterprise 64 bit, LibreOffice 6 (*Writer (текстовый процессор), Calc (электронные таблицы), Impress (презентации), Draw (векторная графика), Base (база данных), Math (редактор формул)*), Maxima, Total Commander, WinDjView, Foxit Reader, 7-Zip, Mozilla Firefox.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины: Учебная аудитория для проведения занятий лекционного и семинарского типа, текущего контроля и промежуточной аттестации (394018, г. Воронеж, площадь Университетская, д. 1, пом. I). Специализированная мебель.

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Пространство основных функций D. Пространство обобщенных функций D'. Непрерывные операции в D и D'	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	Тестовые задания, перечень вопросов к зачёту

2	Пространство основных функций S. Пространство обобщенных функций медленного роста S'	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	Тестовые задания, перечень вопросов к зачёту
Промежуточная аттестация Форма контроля - Зачет				перечень вопросов к зачёту

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Примерный перечень тестовых заданий

1. Принадлежит ли функция $e^{|x|}$ пространству $D'(\mathbb{R})$?

а) да, б) нет.

2. Принадлежит ли функция $e^{|x|}$ пространству $S'(\mathbb{R})$?

а) да, б) нет.

3. Пространством $D(\mathbb{R}^n)$ называется множество

а) бесконечно дифференцируемых функций,
б) финитных функций,
в) бесконечно дифференцируемых и финитных функций.

4. Пространством $S'(\mathbb{R}^n)$ называется множество

а) непрерывных функционалов, заданных над пространством $S(\mathbb{R}^n)$,
б) непрерывных и линейных функционалов, заданных над пространством $S(\mathbb{R}^n)$,
в) линейных функционалов, заданных над пространством $S(\mathbb{R}^n)$.

5. Принадлежит ли функция $\operatorname{sgn}(x^2-1)$ пространству $D'(\mathbb{R})$?

а) да, б) нет.

6. Принадлежит ли функция $\operatorname{sgn}(x^2-1)$ пространству $S'(\mathbb{R})$?

а) да, б) нет.

7. Пространством $S(\mathbb{R}^n)$ называется множество

а) бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций,
б) бесконечно дифференцируемых и финитных в $\mathbb{R}^n$ функций,
в) бесконечно дифференцируемых функций которые вместе со всеми своими производными на бесконечности убывают быстрее чем $|x|^{-m}$, где m – произвольное натуральное число.

8. Пространством $D'(\mathbb{R}^n)$ называется

а) множество линейных и непрерывных функционалов заданных над пространством $D(\mathbb{R}^n)$,
б) множество функционалов заданных над пространством $D(\mathbb{R}^n)$,
в) множество линейных функционалов заданных над пространством $D(\mathbb{R}^n)$,
г) множество непрерывных функционалов заданных над пространством $D(\mathbb{R}^n)$.

9. Принадлежит ли функция

$$y(x)=\begin{cases}\sin x,\ x<-1;\\ 1,\ -1\le x\le 1;\\ \cos x,\ x>1.\end{cases}$$

пространству $D'(\mathbb{R})$?

а) да, б) нет.

10. Принадлежит ли функция

$$y(x)=\begin{cases}\sin x,\ x<-1;\\ 1,\ -1\le x\le 1;\\ \cos x,\ x>1.\end{cases}$$

пространству $S'(\mathbb{R})$?

а) да, б) нет.

11. Дельта-функция Дирака действует на произвольную обобщенную функцию $\varphi(x)$ по формуле

а) $(\delta(x),\varphi(x))=\varphi(0)$, б) $(\delta(x),\varphi(x))=-\varphi(0)$, в) $(\delta(x),\varphi(x))=\varphi'(0)$.

12. Операция дифференцирования является непрерывной операцией над пространством основных функций?

а) да, б) нет.

13. Принадлежит ли функция $|x|\sin x$ пространству $D'(\mathbb{R})$?

а) да, б) нет.

14. Принадлежит ли функция $|x|\sin x$ пространству $S'(\mathbb{R})$?

а) да, б) нет.

15. Носителем дельта-функции Дирака является

а) $\mathbb{R}$, б) 0, в) $[-1;1]$.

16. Операция линейной неособой замены является непрерывной операцией над пространством основных функций?

а) да, б) нет.

17. Пусть $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, а $\theta(x)$ – функция Хевисайда. Какая из этих функций является регулярной?

а) $\delta(x)$, б) $\theta(x)$.

18. Операция линейной неособой замены является непрерывной операцией над пространством обобщенных функций?

а) да, б) нет.

19. Растекается ли носитель обобщенной функции при дифференцировании?

а) да, б) нет.

20. У любой ли обобщенной функции существует производная по Соболеву?

а) у любой, б) не у любой.

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

К основным формам текущего контроля можно отнести устный опрос, проверку домашних заданий, тестовые задания, контрольные работы.

В ходе тестовых заданий обучающемуся выдается КИМ с тестовыми заданиями, если тестовое задание проводится в дистанционной форме, то КИМ размещаются в системе «Электронный университет». КИМ тестового задания содержат три задания. На написание тестового задания отводится 15 минут. Тестовое задание оценивается в формате «зачтено» и «не зачтено». Для получения «зачтено» в тестовом задании нужно верно ответить на два задания. «Не зачтено» выставляется в том случае, если ответ обучающегося не удовлетворяет критериям ответа на «зачтено».

20.2. Промежуточная аттестация

Теоретические вопросы к зачету:

1. Пространство основных функций D. Непрерывность операции в D.
2. Пространство обобщенных функций D'. Пример функционала из D'.
3. Лемма о диагональной последовательности и теорема о полноте пространства D'.
4. Носитель и нулевое множество обобщенной функции. Дельта-функция Дирака. Дельта-функция Дирака как предел последовательности основных функций.
5. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Лемма дю-Буа-Реймонда. Доказательство сингулярности дельта-функции Дирака.
6. Формулы Сохоцкого.
7. Непрерывные операции в D'. Операция дифференцирования. Линейная замена переменной. Умножение на бесконечно дифференцируемую функцию.
8. Обобщенные производные по Соболеву. Пример на вычисление обобщенной производной кусочно-дифференцируемой функции.
9. Свойства обобщенных производных: линейность, непрерывность, бесконечная дифференцируемость, независимость от порядка дифференцирования, формула Лейбница дифференцирования произведения, нерастекание носителя при обобщенном дифференцировании.
10. Пространство основных функций S. Сходимость в S. Вложение D в S.
11. Непрерывность операции в S.
12. Пространство обобщенных функций медленного роста в S'. Сходимость в S'. Вложение S' в D'.
13. Непрерывные операции в S'.
14. Теорема Л.Шварца. Пример обобщенной функции медленного роста.

Практические вопросы к зачету:

1. Пусть $\varphi \in D(\mathbb{R}), \eta(x) \in D(\mathbb{R})$ и $\eta(x) \equiv 1$ в окрестности $x = 0,$ функция $\alpha(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ имеет единственный нуль порядка 1 в точке $x = 0$. Доказать, что функция $\psi(x) = = \dfrac{\varphi(x) - \eta(x)\varphi(0)}{\alpha(x)}$ основная из $D(\mathbb{R})$.

2. Показать, что любая функция $\varphi_1(x) \in D(\mathbb{R})$ может быть представлена как производная от некоторой другой функции $\varphi_2(x) \in D(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)dx = 0.$

3. Показать, что любая функция $\varphi(x) \in D(\mathbb{R})$ может быть представлена в виде $\varphi(x) = \varphi_0(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x')dx' + \varphi_1'(x),$ где $\varphi_1(x)$ – это некоторая функция из $D(\mathbb{R})$, а $\varphi_0(x)$ – любая основная функция из $D(\mathbb{R})$, удовлетворяющая условию $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)dx = 1$.

4. Пусть непрерывная функция $f(x)$ финитна, то есть существует $R > 0$, такое, что $f(x) \equiv 0$ при $|x| > R$. Показать, что функция $f_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\omega_\varepsilon(x-y)dy$ – основная из $D(\mathbb{R}^n)$, причем $f_\varepsilon(x) = 0$ при $|x| > R + \varepsilon$ и $f_\varepsilon(x) \overset{x \in \mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} f(x)$ при $\varepsilon \to 0$.

5. Доказать, что существуют такие функции $\varphi_\delta(x)\in D(\mathbb{R})$, где $\delta>1$, что $\varphi_\delta(x)=1$ при $|x|\le\delta-1$, $\varphi_\delta(x)=0$ при $|x|\ge\delta$ и $\left|\varphi_\delta^{(\alpha)}(x)\right|\le c_\alpha$, где c_α – постоянная, независящая от δ.

6. Ответить на следующие вопросы:

1) Чему равен носитель δ_s. 2) Что можно сказать о носителе $\mu(x)\delta_s$, где $\mu(x)$ – это функция определенная на поверхности S.

3) Определить носитель функции $2\delta(R_1-|x-1|)+3\delta(R_2-|x-2|)$.

7. Доказать, что $\delta(x-\nu)\to 0$ при $\nu\to\infty$ в $D'(\mathbb{R})$.

8. Доказать, что $e^x\in D(\mathbb{R})$.

9. Вычислить предел в $D'(\mathbb{R})$ при $\varepsilon\to+0$ следующей функции $F_\varepsilon(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}$.

. Воспользуйтесь тем, что $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}dx=1.$

10. Пусть $\psi(x)\in D(\mathbb{R})$ и $\psi(x)\ge 0, \int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x)dx=1,\quad \psi(x)=0$ при $|x|\ge 1$, а $\psi_\varepsilon(x)=\dfrac{1}{\varepsilon^n}\psi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$.

Доказать, что $\psi_\varepsilon(x)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{D'(\mathbb{R})}\delta(x)$.

11. Вычислить предел в $D'(\mathbb{R})$ при $\varepsilon\to+0$ следующей функции $F_\varepsilon(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{\varepsilon}$.

Воспользуйтесь тем, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{\varepsilon}dx=\pi.$

12. Вычислить предел в $D'(\mathbb{R})$ при $\varepsilon\to 0$ функции $f_\varepsilon(x)=\dfrac{\varepsilon}{\pi x^2}\sin^2\dfrac{x}{\varepsilon}$.

Воспользуйтесь тем, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}dx=\pi.$

13. Доказать, что ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(x-k)$ сходится в $D'(\mathbb{R})$ при любых a_k.

14. Пусть $x\in\mathbb{R}^n$. Доказать, что $\delta(ax)=\dfrac{1}{|a|^n}\delta(x),\ a\ne 0.$

15. Вычислить производную функции $x\,\mathrm{sign}\,x$.

16. Вычислить производную функции $\theta(x)\sin x$.

17. Доказать, что если $\rho(x)\in C^\infty(\mathbb{R})$, то в $D'(\mathbb{R})$ справедливо равенство $(\theta(x)\rho(x))'=\delta(x)\rho(0)+\theta(x)\rho'(x).$

18. Вычислить производную функции $\theta(x)\cos x.$

19. Вычислить производные порядка 1, 2, 3 функции $y=|x|\sin x$.

20. Вычислить производную порядка m от функции $\theta(a-|x|)$, где $a>0$.

21. Вычислить производную порядка m от функции $[x]$, где $[x]$ – целая часть числа x (наибольшее целое число, не превосходящее x).

22. Вычислить производную порядка m от функции $\operatorname{sign}\sin x$.

23. Вычислить производную порядка m от функции $\operatorname{sign}\cos x$.

24. Найти все производные функции $y=\begin{cases}\cos x,\ x\ge 0,\\ 0,\ x<0.\end{cases}$

25. Найти все производные функции $y(x)=\begin{cases}0,\ \ x\le -1,\\ (x+1)^2,\ -1\le x\le 0,\\ x^2+1,\ \ x\ge 0.\end{cases}$

26. Найти все производные функции $y(x)=\begin{cases}\sin x,\ -\pi\le x\le\pi,\\ 0,\ |x|\ge\pi.\end{cases}$

27. Найти все производные функции $y(x)=\begin{cases}|\sin x|,\ -\pi\le x\le\pi,\\ 0,\ |x|>\pi.\end{cases}$

28. Найти все производные функции $y(x)=\begin{cases}0,\ \ x\le 0,\\ x^2,\ \ 0\le x\le 1,\\ (x-2)^2,\ \ 1\le x\le 2,\\ 0,\ \ x\ge 2.\end{cases}$

29. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ локально интегрируемы в $\mathbb{R}^n$ и пусть $f(x)$ или $g(x)$ финитна. Показать, что $f*g$ является локально интегрируемой функцией.

30. Показать, что $D\subset S$ и из сходимости в D следует сходимость в S.

31. Пусть $\varphi(x)\in S(\mathbb{R}^n)$. Доказать, что если $\varphi_k(x)\to\varphi(x)$ при $k\to\infty$ в $S(\mathbb{R}^n)$, то для любого мультииндекса α $\varphi_k^{(\alpha)}(x)\overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows}\varphi^{(\alpha)}(x)$ при $k\to\infty$ в $\mathbb{R}^n$.

32. Пусть $\varphi(x)\in S(\mathbb{R})$. Выяснить, есть ли среди последовательностей 2) $\dfrac{1}{k}\varphi(kx)$ 3) $\dfrac{1}{k}\varphi(\dfrac{x}{k})$ сходящиеся в $S(\mathbb{R})$.

33. Пусть функция $\psi(x)\in C^\infty(\mathbb{R})$, $\psi(x)\equiv 0$ при $x<a$ и ограничена вместе со всеми производными. Доказать, что функция $\psi(x)e^{-\sigma x}\in S(\mathbb{R})$, если $\sigma>0$.

34. Пусть $t\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}$. Доказать, что функционал $\dfrac{1}{2a}\theta(at-|x|)$ принадлежит $S'(\mathbb{R}^2)$.

35. Доказать, что ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(x-k)$ сходится в $S'(\mathbb{R})$, если существуют $c>0$ и $m\in N$ такие, что $|a_k|\le c(1+|k|)^m$.

36. Доказать, что функционал $e^x\notin S'(\mathbb{R})$.

37. Доказать, что $e^x\sin e^x\in S'(\mathbb{R})$.

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины «Дополнительные главы уравнений в частных производных» в форме зачета.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра и может завершать изучение как отдельной дисциплины, так и ее разделов. Промежуточная аттестация помогает оценить более крупные совокупности знаний и умений, в некоторых случаях даже формирование определенных профессиональных компетенций.

На зачете оценивается практический уровень освоения дисциплины и степень сформированности компетенций оценками «зачет» и «не зачет».

В ходе зачета обучающемуся выдается КИМ с практическими заданиями, если зачет проводится в дистанционной форме, то КИМ размещаются в системе «Электронный университет». КИМ зачета содержат три задания. На написание зачета отводится 90 минут. Для получения «зачет» нужно верно ответить на два задания. «Не зачет» выставляется в том случае, если ответ обучающегося не удовлетворяет критериям ответа на «зачет».

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно) Test1-5:

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

Test1

Принадлежит ли функция $e^{|x|}$ пространству $D'(\mathbb{R})$?

а) да, б) нет.

Ответ: а).

Test2

Пространством $S(\mathbb{R}^n)$ называется множество

а) бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций,

б) бесконечно дифференцируемых и финитных в $\mathbb{R}^n$ функций,

в) бесконечно дифференцируемых функций которые вместе со всеми своими производными на бесконечности убывают быстрее чем $|x|^{-m}$, где m – произвольное натуральное число.

Ответ: в).

Test3

Дельта-функция Дирака действует на произвольную обобщенную функцию $\varphi(x)$ по формуле

а) $(\delta(x),\varphi(x))=\varphi(0)$, б) $(\delta(x),\varphi(x))=-\varphi(0)$, в) $(\delta(x),\varphi(x))=\varphi'(0)$.

Ответ: а).

Test4

Операция дифференцирования является непрерывной операцией над пространством основных функций?

а) да, б) нет.

Ответ: а).

Test5

Носителем дельта-функции Дирака является

а) $\mathbb{R}$, б) 0, в) $[-1;1]$.

Ответ: б).

Задания открытого типа (короткий текст): **!Task6-10**

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

!Task6 **Вставьте пропущенное слово или закончите определение**

У любой и обобщенной функции существует производная ……. порядка?

.!Ответ

любого

!Task7

Пространством $D'(\mathbb{R}^n)$ называется множество ……. и непрерывных функционалов заданных над пространством $D(\mathbb{R}^n)$.

!Ответ

линейных

!Task8

Пространством $D(\mathbb{R}^n)$ называется множество бесконечно дифференцируемых и ……… функций.

!Ответ

финитных

!Task9

Операция умножения на бесконечно дифференцированную функцию является …………операцией над пространством $D'(\mathbb{R}^n)$.

!Ответ

непрерывной

!Task10

Дельта-функции Дирака является ……… обобщенной функцией.

!Ответ

сингулярной

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).